

А. А. Локшин, Е. А. Иванова

# «КАМЕШКИ»

## И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Третье издание,  
исправленное и дополненное



---

МОСКВА – 2022

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

Л73

**Локшин А.А., Иванова Е.А.**

Л73      «Камешки» и другие математические игры /  
А. А. Локшин, Е. А. Иванова. – 3-е изд., испр. и доп. –  
Москва : МАКС Пресс, 2022. – 60 с.  
ISBN 978-5-317-06734-2

Книжка посвящена разбору ряда задач, относящихся к элементарной теории игр. Адресована студентам младших курсов педагогических институтов, а также старшим школьникам, интересующимся математикой. Ряд параграфов посвящен поиску универсальной формулы для длины периода последовательности проигрышных и выигрышных позиций в игре «камешки», а также явлению резонанса периодов. В третье издание добавлен §14, в котором рассматривается новая интерпретация игры «камешки».

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

---

**Учебное издание**

**ЛОКШИН Александр Александрович  
ИВАНОВА Елена Алексеевна**

**«КАМЕШКИ»  
и другие математические игры**

*Третье издание, исправленное и дополненное  
В издании использованы рисунки А. А. Локшина*

Подготовка оригинал-макета:  
Издательство «МАКС Пресс»

Главный редактор: Е. М. Бугачева  
Компьютерная верстка: Н. С. Давыдова  
Обложка: М. А. Еронина

Подписано в печать 13.01.2022 г. Формат 84х108 1/16. Усл. печ. л. 3,75. Тираж 25 экз. Изд. № 003.

Издательство ООО «МАКС Пресс». Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.  
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.  
Тел.8(495) 939-3890/93. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»  
109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н

**ISBN 978-5-317-06734-2**

© Локшин А. А., Иванова Е. А., 2021  
© Локшин А. А., Иванова Е. А., 2022,  
с изменениями  
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2022

## **Содержание**

Предисловие .....	4
§ 1. О периодических решениях в игре «камешки».....	5
§ 2. Биения и устойчивость в последовательности П и В в игре «камешки». Мультипликативность периода .....	12
§ 3. Периодичность проигрышных и выигрышных позиций в игре «камешки» (две кучи камней) .....	16
§ 4. Игра «ползунок» .....	19
§ 5. Игра «ломаная» .....	23
§ 6. Магический квадрат и стратегия Шеня .....	24
§ 7. Игра с часовыми стрелками .....	27
§ 8. Задача о трех кучах конфет.....	29
§ 9. Игра с минусами .....	33
§ 10. Игра «календарь» .....	35
§ 11. Доказательство мультипликативности периода в игре «камешки».....	38
§12. Игра «камешки» в случае трех вариантов хода. Опровергнутая гипотеза .....	41
§13. Игра «камешки» в случае трех вариантов хода. Резонанс периодов .....	46
§14. Игра «полоска». Скрытая стратегия.....	52
Литература .....	60

## **Предисловие к третьему изданию**

В этой книжке рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к основам элементарной теории игр и представляющиеся авторам недостаточно освещенными в литературе. Основное внимание удалено вычислению периода в последовательности выигрышных и проигрышных стратегий в игре «камешки», приведено компактное описание выигрышных стратегий в играх «ползунок» и «ломаная», рассмотрены некоторые другие игры. Книжка может быть полезна студентам педагогических вузов и старшим школьникам. Ряд параграфов посвящен поиску универсальной формулы для длины периода последовательности проигрышных и выигрышных позиций в игре «камешки», а также явлению резонанса периодов. В третье издание добавлен §14, в котором рассматривается новая интерпретация игры «камешки».

Авторы признательны И.В. Рублеву за полезные обсуждения.

*Авторы,  
Москва, декабрь, 2021*

## § 1. О периодических решениях в игре «камешки»

В этом параграфе (содержание которого в основном взято из [3]) мы рассмотрим один класс несложных задач, встречающийся в теории игр (так называемую игру «камешки»). Пусть имеется куча камней (количество камней в куче равно  $M$ ) и двое играющих, которые по очереди могут взять из кучи  $a_1$  или  $a_2 \dots$  или  $a_n$  камней. Здесь

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < M. \quad (1.1)$$

Проигрывает тот, кто не может сделать хода. В частности, если один из игроков в какой-то момент забрал все оставшиеся камни, то его партнер не может сделать хода и, следовательно, проиграл.

Количество камней, остающееся в куче после какого-либо хода одного из партнеров, мы будем называть **позицией**. Позицию будем называть **проигрышной**, если игрок, которому она досталась, неизбежно проиграет при некотором (оптимальном) способе действий его партнера. Ничьих в данной игре, очевидно, не бывает. Поэтому каждая позиция, не являющаяся проигрышной, будет **выигрышной**. А именно, игрок, которому досталась выигрышная позиция, при некотором (оптимальном) способе действий обязательно выиграет у своего партнера.

Нетрудно видеть, что справедливы следующие два исключительно полезные утверждения (см., например, [1, 2]):

**Утверждение 1.** Позиция, из которой есть **хотя бы один ход** в проигрышную, – выигрышная.

**Утверждение 2.** Позиция, из которой **все** ходы ведут в выигрышные позиции, сама является проигрышной.

**Замечание.** Обычно в теории игр принято задавать следующий вопрос. Пусть заданы конкретные числовые значения для  $a_1, a_2, \dots, a_n, M$ . Кто выиграет при правильной (оптимальной для каждого из участников) игре – начинающий или его партнер? Проще всего решать такую задачу «с конца», опираясь на Утверждения 1 и 2. А именно, строят последовательность целых неотрицательных чисел (где каждое число – количество камней, оставшихся в куче, т.е. некоторая позиция в рассматриваемой игре), и под каждой такой позицией пишут букву П (проигрышная) или В (выигрышная). Например, если из кучи камней разрешается брать только по два камня, то получается таблица вида:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

ППВВПП ВВП ...

Нетрудно видеть, что последовательность букв П и В в рассматриваемом частном случае имеет период 4.

**Теорема 1.** *Пусть выполнено условие (1.1). Кроме того, будем считать, что количество  $M$  камней в куче сколь угодно велико. Тогда последовательность букв П и В, обозначающих проигрышные и выигрышные позиции в рассматриваемой игре, оказывается периодической начиная с некоторого номера.*

**Доказательство теоремы.** Пусть  $X$  – произвольная позиция (т.е. число остающихся камней в куче), такая, что  $X > a_n$ . Введем обозначение  $f(X)$  для функции, принимающей значения П или В, в зависимости от того, является позиция  $X$  проигрышной или выигрышной. В силу Утверждений 1 и 2 значение  $f(X)$  однозначно определяется значениями  $f(X - a_1), f(X - a_2), \dots, f(X - a_n)$ . Очевидно, что мы можем ослабить только что сделанное утверждение, придав ему следующую форму:

Для любого  $X$ , удовлетворяющего условию  $X > a_n$ , значение  $f(X)$  однозначно определяется значениями

$$f(X-1), f(X-2), \dots, f(X-a_n). \quad (1.2)$$

Далее, заметим, что всегда можно найти такие различные  $X$  и  $Y$ , что выполнены равенства:

$$\begin{aligned} f(X-1) &= f(Y-1), \\ f(X-2) &= f(Y-2), \\ &\dots \\ f(X-a_n) &= f(Y-a_n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

(Для определенности считаем здесь, что  $Y > X$ )

Действительно, различных составленных из букв П и В упорядоченных наборов длины  $a_n$  имеется всего лишь конечное количество (а именно,  $2^{a_n}$ ). Так как рассматриваемая последовательность букв П и В бесконечна (ибо мы устремили  $M$  к бесконечности), то существование  $X$  и  $Y$  с требуемыми свойствами очевидно.

Теперь в силу (1.2) мы можем продолжить равенства (1.3), написав:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(Y), \\ f(X+1) &= f(Y+1), \\ f(X+2) &= f(Y+2), \\ &\dots \\ f(X+k) &= f(Y+k) \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Покажем, что из этих равенств следует периодичность (начиная с номера  $X$ ) рассматриваемой последовательности проигрышер и выигрышер. Действительно, положим в (1.4)

$$k = Y - X; \quad (1.5)$$

в результате получим:

$$f(X + (Y - X)) = f(Y + (Y - X)).$$

Используя тождество

$$Y = X + (Y - X), \quad (1.6)$$

предыдущее соотношение, очевидно, можно переписать в виде

$$f(X + (Y - X)) = f(X + 2(Y - X)). \quad (1.7)$$

С учетом (1.4) и (1.6) получаем отсюда:

$$f(X) = f(X + (Y - X)) = f(X + 2(Y - X)). \quad (1.8)$$

Положим теперь в (1.4)

$$k = 2(Y - X). \quad (1.9)$$

Снова пользуясь тождеством (1.6), получаем соотношение, аналогичное (1.7):

$$f(X + 2(Y - X)) = f(X + 3(Y - X)).$$

Продолжая процесс, легко приходим к бесконечной цепочке равенств:

$$f(X) = f(X + (Y - X)) = f(X + 2(Y - X)) = f(X + 3(Y - X)) = \dots \quad (1.10)$$

Аналогичная цепочка равенств, очевидно, может быть установлена для любого натурального  $i$ :

$$\begin{aligned} f(X + i) &= f(X + i + (Y - X)) = \\ &= f(X + i + 2(Y - X)) = \\ &= f(X + i + 3(Y - X)) = \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) и следует утверждение теоремы.

**Замечание.** Доказанная теорема позволяет дать грубую оценку для длины  $T$  наименьшего периода последовательности проигрышных и выигрышных позиций в рассматриваемой задаче.

Прежде всего, заметим, что, поскольку  $Y - X$  является длиной одного из периодов нашей последовательности, справедлива оценка  $T \leq Y - X$ . Далее, как было замечено при доказательстве теоремы 1, различных составленных из букв П и В упорядоченных наборов длины  $a_n$  имеется всего  $2^{a_n}$ . Рассмотрим теперь последовательность упорядоченных наборов позиций:

$$\begin{aligned} [1, 2, \dots, a_n], [2, 3, \dots, a_n + 1], [3, 4, \dots, a_n + 2], \dots, \\ \dots, [1 + 2^{a_n}, 2 + 2^{a_n}, \dots, a_n + 2^{a_n}]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Этих наборов позиций в последовательности (1.12) всего  $1 + 2^{a_n}$  штук. Следовательно, по крайней мере для двух наборов позиций из последовательности (1.12) соответствующие им упорядоченные наборы букв П и В будут одинаковы. Отсюда, очевидно, следует оценка

$$Y - X \leq 2^{a_n}.$$

Следовательно, для длины  $T$  наименьшего периода тем более будет справедлива оценка

$$T \leq 2^{a_n}. \quad (1.12')$$

Эта оценка, безусловно, является чрезвычайно грубой. Однако для общего случая авторам неизвестна более точная оценка длины периода. Впрочем, для достаточно широкого класса задач, в формулировке которых присутствует своеобразная «центральная симметрия», длину периода удается вычислить точно.

**Лемма.** *Пусть в условиях предыдущей теоремы  $n = 2$ . Для упрощения обозначений положим теперь  $a_1 = a$ ,  $a_2 = c$ . Тогда последовательность букв П и В, обозначающих проигрышные и выигрышные позиции в рассматриваемой игре, оказывается периодической с самого начала (предпериодическая часть отсутствует) и обладает периодом, длина которого равна  $a + c$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим некоторую произвольную позицию  $X$  нашей игры (иными словами, пусть  $X$  – это число остающихся камней в куче). Снова воспользуемся обозначением  $f(X)$  для функции, принимающей значения П или В, в зависимости от того, является позиция  $X$  проигрышной или выигрышной. Заметим теперь, что

$$\text{если } f(X) = \text{П, то } f(X + a + c) = \text{П.} \quad (1.13)$$

Действительно, пусть игрок  $A$ , находящийся в позиции  $X + a + c$ , берет  $a$  камней, т.е. ставит своего партнера в позицию  $X + c$ . Но тогда его партнер имеет возможность взять  $c$  камней и тем самым поставить игрока  $A$  в проигрышную позицию  $X$ . Если же игрок  $A$ , находящийся в позиции  $X + a + c$ , возьмет  $c$  камней, то его партнер возьмет  $a$  камней и снова поставит игрока  $A$  в проигрышную позицию  $X$ . Итак, соотношение (1.13) установлено.

Покажем теперь, что имеет место следующее соотношение, аналогичное (1.13):

$$\text{если } f(X) = \text{В, то } f(X + a + c) = \text{В.} \quad (1.14)$$

**Случай 1.**  $X \geq c$ .

Итак, пусть для некоторого  $X$  (такого, что  $X \geq c$ ) имеем  $f(X) = \text{В}$ . Тогда в силу Утверждения 1 должно выполняться по крайней мере одно из двух равенств:

$$f(X - a) = \text{П},$$

$$f(X - c) = \text{П},$$

откуда в силу (1.13) следует, что должно выполняться по крайней мере одно из двух других равенств:

$$f(X + c) = \text{П},$$

$$f(X + a) = \text{П}.$$

В силу Утверждения 1 отсюда, очевидно, следует, что

$$f(X + a + c) = \text{В}.$$

Тем самым соотношение (1.14) в случае  $X \geq c$  доказано.

**Случай 2.**  $a \leq X < c$ .

Пусть  $f(X) = B$ . Взять  $c$  камней из кучи, находясь в позиции  $X$ , очевидно, невозможно. Поэтому должно выполняться соотношение  $f(X - a) = P$ .

В силу (1.13) отсюда следует, что

$$f(X + c) = P.$$

Вспоминая Утверждение 1, заключаем, что

$$f(X + a + c) = B.$$

Тем самым (1.14) установлено в случае  $a \leq X < c$ .

Наконец, в случае  $0 \leq X < a$  равенство  $f(X) = B$ , очевидно, невозможно.

Итак, (1.14) полностью доказано. Из (1.13) и (1.14) вытекает утверждение леммы.

**Пример.** Пусть в условиях предыдущей леммы  $a = 2$ ,  $c = 9$ . Построим таблицу, сопоставляющую каждой позиции  $X$  в игре значение  $f(X)$ :

<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>19</u>	<u>20</u>	<u>21</u>	...
P	P	V	P	P	V	V	P	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	...	

Из приведенной таблицы видно, что период последовательности букв П и В равен  $2 + 9 = 11$ .

Из результата леммы сразу следует важная

**Теорема 2 (основная).** Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть, кроме того, для возможных вариантов хода имеет место центральная симметрия:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = S,$$

где  $S$  – некоторое натуральное число. Тогда последовательность букв П и В, обозначающих проигрышные и вы-

*игрышные позиции в рассматриваемой игре, оказывается периодической с самого начала (предпериодическая часть отсутствует) и обладает периодом, длина которого равна  $S$ .*

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству предыдущей леммы.

## § 2. Биения и устойчивость в последовательности П и В в игре «камешки». Мультипликативность периода

Рассмотрим теперь в качестве примера игру «камешки» со следующими вариантами хода: из кучи камней игроки по очереди могут брать два, девять или сто камней. Проигрывает (как обычно) тот, кто не может сделать хода.

Изобразим последовательность выигрышных и проигрышных позиций в соответствующей таблице:

<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>19</u>	<u>20</u>	<u>21</u>	...
P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	V	
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	
P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	P	V	V	P	V	

Мы видим, что последовательность проигрышней и выигрышней в нашей задаче вплоть до позиции 99 (включительно) происходит с периодом 11 в полном соответствии с основной теоремой 2. Однако начиная с позиции 100 эта периодичность «сбивается»: позиция 100, очевидно, становится выигрышной, то же верно и для позиции 101. Однако позиция 102 не превращается в проигрышную, поскольку  $102 - 9 = 93$ , а позиция 93 проигрышная. Коротко запишем это в виде:  $102 = \text{B}$ , поскольку  $93 = \text{P}$ . Аналогично,  $103 = \text{B}$ ,

поскольку  $94 = \Pi$ . Продолжая в том же духе, заполняем таблицу для позиций 104, 105,... 110. Мы видим, что на промежутке  $[100; 110]$  по сравнению с предыдущими промежутками той же длины «рисунок» последовательности проигрышней и выигрышней полностью изменился. Посмотрим, как этот рисунок будет видоизменяться дальше:

111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	...
$B$	$\Pi$	$\Pi$									

Мы видим, что новая периодичность не устанавливается сразу же. Более того, на промежутке  $[200; 210]$  «в игру», очевидно, вступят изменения, произошедшие на промежутке  $[100; 110]$ . В результате возникают своеобразные «бienia», из-за которых окончательный период последовательности проигрышней и выигрышней может оказаться большим.

**Замечание 1.** Существуют, однако, ситуации, когда добавление дополнительного варианта хода *не меняет* уставновившегося периода в последовательности  $\Pi$  и  $B$ .

Итак, рассмотрим в качестве очередного примера игру «камешки», в которой из кучи камней двое по очереди берут 1 или 2 камня (как обычно, проигрывает тот, кто не может сделать хода).

В этом случае последовательность проигрышных и выигрышных позиций имеет, очевидно, вид:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\Pi$	$B$	$B$	$\Pi$	$B$	$B$	$\Pi$	$B$	$B$	$\Pi$	$B$	

(2.1)

Таким образом, все проигрышные позиции имеют номера, кратные 3. Если в качестве возможного варианта хода добавить любое натуральное число, большее 1 и не деля-

щееся на 3, то последовательность выигрышных и проигрышных позиций, очевидно, не изменится. Например, таблица (2.1) по-прежнему будет описывать последовательность проигрышных и выигрышных позиций в игре, где игрокам разрешается брать 1, 2 или 7 камней. Аналогичное утверждение справедливо и в еще более общей ситуации, когда вариантов хода несколько: например, разрешается брать за один ход 1, 2, 13, 17 или 25 камней.

**Замечание 2.** Вот еще один пример, когда добавление нового варианта хода не меняет установившегося периода игры. Итак, пусть в игре «камешки» игроки по очереди берут из кучи камней 2, 3 или 4 камня. В этом случае, как мы можем сразу сказать, опираясь на основную теорему 2 из § 1, длина периода в последовательности П и В будет равна  $2 + 4 = 6$ . Приведем соответствующую таблицу:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
П	П	В	В	В	В	П	П	В	В	В	В	П	П	(2.2)

Добавим теперь в игру в качестве варианта хода возможность взять 8 камней. Заметим, что  $8 = 6 + 2$ , т.е. 8 на 2 превышает длину периода исходной игры (2.2). Очевидно, что взятие 8 камней из любой проигрышной позиции в (2.2) обязательно ведет к выигрышной позиции партнера. В результате приходим к выводу, что добавление нового хода в игру не изменило последовательности проигрышей и выигрышней. (Аналогичный эффект произвела бы добавленная в игру возможность взять 9 или 10 камней.)

**Замечание 3.** В заключение этого параграфа продемонстрируем еще одно замечательное свойство периода последовательностей проигрышней и выигрышней в игре «камешки». Это свойство можно назвать *мультипликативностью периода*, и мы его продемонстрируем на примерах.

Итак, рассмотрим игру, в которой из кучи камней разрешается взять 2 или 8 камней. Такую игру мы будем называть  $\{2; 8\}$ -игрой. Нетрудно проверить, что в этой игре период последовательности проигрышер и выигрышер имеет вид ППВВППВВВВ.

Удвоим теперь количества камней, которые разрешаются взять из кучи, т.е. рассмотрим  $\{4; 16\}$ -игру. Элементарный подсчет позволяет вычислить период и в этой игре; этот период имеет теперь вид

ППППВВВВППППВВВВВВВВ.

Мы видим, что по сравнению с  $\{2; 8\}$ -игрой в  $\{4; 16\}$ -игре период последовательности П и В удлинился вдвое с сохранением “внутренних пропорций”.

Проверим обнаруженную закономерность в более сложном, не симметричном случае, когда из кучи камней первоначально разрешается брать 1, 2 или 6 камней, т.е. рассмотрим  $\{1; 2; 6\}$ -игру. Нетрудно проверить, что в этой игре период последовательности проигрышер и выигрышер имеет длину 7 и, соответственно, вид: ПВВПВВВ.

Удвоим количества камней, которые разрешается брать из кучи, т.е. рассмотрим  $\{2; 4; 12\}$ -игру. Как и ожидалось, период последовательности П и В удлинился вдвое (теперь его длина стала равна 14) и сохранил свои “внутренние пропорции”. Вот как выглядит этот новый период:

ППВВВВППВВВВВВ.

Авторы провели еще несколько аналогичных экспериментов, в которых сохранялось обнаруженное свойство периода в игре «камешки»: при переходе от  $\{a, b, c\}$ -игры к  $\{ka, kb, k c\}$ -игре период последовательности П и В удлинялся в  $k$  раз с сохранением “внутренних пропорций”.

**Задача 1.** Выясните, справедливо ли свойство мультиплексивности периода в общем случае  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -игры.

**Задача 2.** Попробуйте придумать алгоритм, восстанавливающий игру «камешки» по последовательности проигрышных и выигрышных позиций (букв П и В).

### **§ 3. Периодичность проигрышных и выигрышных позиций в игре «камешки» (две кучи камней)**

Попробуем обобщить результат основной теоремы 2 из § 1 на случай, когда камни берутся не из одной кучи, а из двух.

Точнее, поставим задачу следующим образом. Имеются две кучи камней, в которых соответственно  $M$  и  $N$  камней. Играют двое. По очереди берут из какой-либо одной кучи 1 или 2 камня. Требуется составить таблицу из проигрышных и выигрышных позиций.

В табл. 1 приведен угловой фрагмент этой таблицы, где над верхней строкой по горизонтали отложено число оставшихся камней в куче № 1, а по вертикали справа от крайнего правого столбца – число оставшихся камней в куче № 2. В каждой клетке приведенного фрагмента таблицы записана буква П или В, в зависимости от того, является ли проигрышной или выигрышной позиция с соответствующими координатами. (Заполнение таблицы осуществляется единственным образом при движении влево и вниз от верхнего правого угла.)

Таблица 1. Из любой одной кучи можно брать один или два камня

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	0
B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	1
B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	2
$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	3
B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	4
B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	5
$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	6
B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	7
B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	8
$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	B	B	$\Pi$	9

Пусть  $(X, Y)$  – произвольная игровая позиция (т.е. пара чисел, обозначающих количества оставшихся камней в кучах № 1 и № 2 соответственно). Введем обозначение  $F(X, Y)$  для функции, принимающей значения  $\Pi$  или  $B$ , в зависимости от того, является позиция  $(X, Y)$  проигрышной или выигрышной. Из табл. 1 ясно, что функция  $F(X, Y)$  оказывается периодической с периодом 3 по каждому аргументу. Более того, все столбцы (и соответственно, все строки) в таблице проигрышных и выигрышных позиций (фрагментом этой бесконечной таблицы является табл. 1) получаются друг из друга в результате сдвига, так что период вдоль каждого столбца (и каждой строки) имеет один и тот же вид: ПВВ. Подчеркнем, что именно таков период в последовательности проигрышной и выигрышной, когда один или два камня берутся из единственной кучи.

Рассмотрим теперь другой пример, слегка видоизменив предыдущую постановку задачи. Пусть теперь из любой одной кучи камней игроки могут по очереди брать 2 или 3 камня.

В этом случае результаты вычислений функции  $F(X, Y)$  окажутся более интересными (см. табл. 2).

*Таблица 2. Из любой одной кучи можно брать два или три камня*

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i> <b>0</b>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i> <b>1</b>
<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <b>2</b>
<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <b>3</b>
<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <b>4</b>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i> <b>5</b>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i> <b>6</b>
<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <b>7</b>
<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <b>8</b>
<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>P</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i> <b>9</b>

И на этот раз функция  $F(X, Y)$  оказалась периодической по каждому аргументу, причем длина этого периода снова совпала с длиной периода в задаче, где камни берутся из единственной кучи. Однако на этот раз столбцы (и, соответственно, строки) таблицы выигрышней и проигрышней уже не однотипны, а естественным образом разбиваются на два класса: а) с периодом ВВВВП; б) с периодом ВВВПП.

**Гипотеза.** Имеются две кучи камней, в которых соответственно  $M$  и  $N$  камней. Играют двое. По очереди берут из какой-либо одной кучи  $a_1$  или  $a_2 \dots$  или  $a_n$  камней.

Здесь  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \min(M, N)$ . Пусть, кроме того, для возможных вариантов хода имеет место центральная симметрия:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = S.$$

Тогда функция  $F(X, Y)$ , введенная выше, будет периодична по каждой из своих переменных с периодом  $S$ .

## § 4. Игра «ползунок»

Эту превосходную игру изобрел Д. Сильверман (1971). Вот ее правила.

Игровое поле состоит из узлов прямоугольной решетки размера  $m \times n$ . Играют двое. Вначале Первый соединяет единичным (горизонтальным или вертикальным) отрезком два соседних узла. Затем Второй соединяет единичным отрезком (горизонтальным или вертикальным) один из концов отрезка, проведенного Первым, с одним из соседних узлов. Затем Первый соединяет единичным отрезком один из концов образовавшейся ломаной с одним из соседних узлов. И так далее. Проигрывает тот, у кого получится замкнутый контур.

В случае, когда хотя бы одно из чисел  $m$ ,  $n$  четно, существует очевидная выигрышная стратегия у Первого игрока. Эта стратегия основана на использовании осевой симметрии (зеркальном повторении ходов Второго игрока). Рассмотрим, например, игровое поле размером  $3 \times 4$  (см. рис. 1).

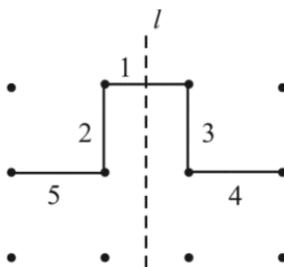


Рис. 1

Здесь нечетными цифрами обозначены ходы Первого игрока, а четными цифрами – ходы Второго. Зеркально отражая (относительно прямой  $l$ ) ходы Второго игрока, Первый обеспечивает себе победу.

Таким образом, играть на поле размером  $m \times n$  в случае, когда хотя бы одно из чисел  $m, n$  четно – неинтересно, поскольку выигрышная стратегия Первого очевидна с самого начала.

Обозримым и, вместе с тем, не вполне тривиальным является случай, когда игровое поле имеет размеры  $3 \times 3$ . Рассмотрением этого случая мы здесь и ограничимся. Покажем, что здесь существует удобная и легко запоминающаяся выигрышная стратегия для Второго игрока.

Прежде всего, заметим, что у Первого игрока существуют всего лишь два существенно различных первых хода (остальные сводятся к ним в результате поворотов и отражений).

Вот эти возможные первые ходы Первого игрока (см. рис. 2).

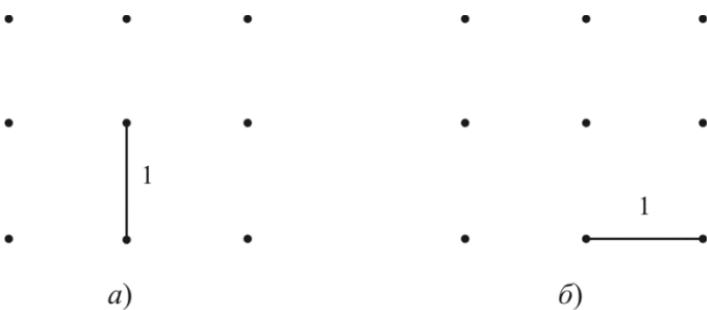


Рис. 2

В случае а) центрально-симметричная стратегия неизбежно ведет Второго игрока к успеху (см. рис. 3).

Впрочем, в случае а) у Второго игрока имеется еще одна (чуть более опасная) стратегия, также ведущая к выигрышу (см. рис. 4). Если Первый игрок не делает хода “3”, то победа Второго игрока обеспечена.

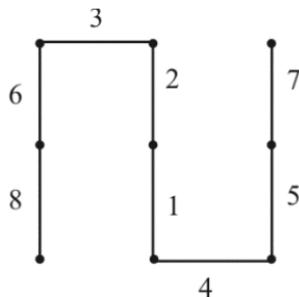


Рис. 3

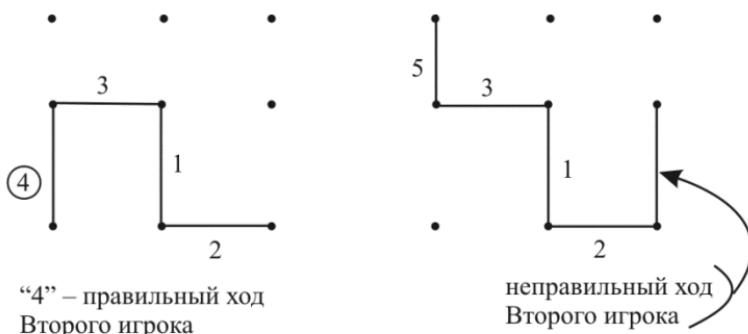
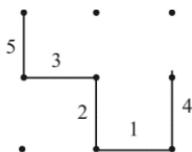


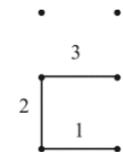
Рис. 4

Если же Первый делает этот ход, то для Второго ход “4”, обведенный кружком на рисунке, является единственным, ведущим к выигрышу. Не делая этого хода, Второй игрок предоставляет возможность Первому игроку сделать ход “5” (см. правую картинку на рис. 4), гарантирующий Первому выигрыш.

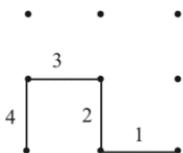
Перейдем теперь к разбору случая б), изображенного на рис. 2. В этом случае правильным ходом Второго игрока будет ход к центру игрового поля (см. рис 5). Затем, при правильной игре Второго игрока, ситуация может развиваться по одному из трех сценариев (Б, В или Г).



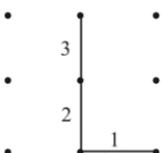
А) Неверный ход “4” Второго игрока  
после хода “3” Первого игрока



Б) Беспроигрышная позиция  
у Второго игрока



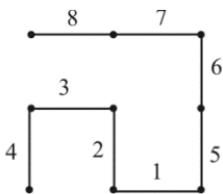
В) Верный ход “4” Второго игрока  
после хода “3” Первого игрока



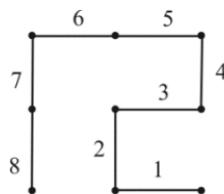
Г) Второй игрок выигрывает, применяя  
центрально-симметричную стратегию

Рис. 5

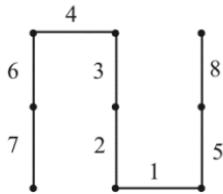
Общим для всех этих сценариев является «вихрь», за-  
кручувающийся вокруг центра игрового поля (см. рис. 6).



Б)



В)



Г)

Рис. 6

Понятно, что если ход Первого будет отложен от среднего нижнего узла не вправо, а влево, то соответствующие вихри будут закручиваться в другую сторону.

## § 5. Игра «ломаная»

Эта игра взята нами из книжки А. Шеня «Игры и стратегии с точки зрения математики», где после формулировки условия самой игры предлагается доказать, что у Первого игрока всегда имеется выигрышная стратегия. Вот формулировка этой игры (см. [1], задача 29):

*«Даны  $n$  точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру: начав с некоторой точки, по очереди последовательно соединяют их отрезками. Первый проводит отрезок  $AB$  из исходной точки  $A$ , второй – отрезок  $BC$ , первый –  $CD$  и так далее. (Ломаная  $ABCD\dots$  может быть самопересекающейся и проходить несколько раз через одну и ту же точку, но дважды проходить по одному отрезку нельзя.) Тот, кто не может сделать ход (все отрезки из его точки уже проведены), проигрывает. Докажите, что первый игрок может выиграть».*

Заметим, что слова «*Докажите, что первый игрок может выиграть*», приведенные после формулировки условия игры, сами по себе являются подсказкой, значительно облегчающей поиск оптимальной стратегии.

Эвристическая стратегия, которую мы сумели обнаружить, формулируется очень просто: *при каждом своем ходе Первый игрок должен проводить свой отрезок в точку, уже соединенную с другими точками максимальным числом отрезков. Если таких точек несколько, то безразлично, какую из них выбрать.*

На рис. 7 и 8 изображен ход игры в случае  $n = 4$  и  $n = 5$ . (Как и выше, ходы Первого игрока пронумерованы нечетными числами, а ходы Второго – четными.)

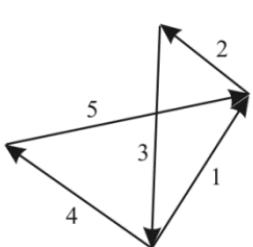


Рис. 7 ( $n = 4$ )

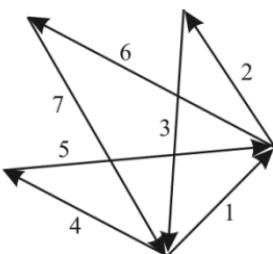


Рис. 8 ( $n = 5$ )

Что касается строгого доказательства предложенного А. Шенем утверждения, то оно может быть проведено по индукции.

## § 6. Магический квадрат и стратегия Шеня (см. [3])

В этом параграфе мы рассмотрим одну красивую идею, связывающую магический квадрат с игрой в крестики-нолики. Идея эта, по-видимому, принадлежит А. Шеню [1, с. 19–20].

Напомним, прежде всего, что *магическим квадратом*  $n$ -го порядка называется квадратная таблица размера  $n \times n$ , заполненная числами  $1, 2, \dots, n^2$ , причем так, что сумма этих чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одна и та же. Рассмотрим магический квадрат третьего порядка (см. рис. 9).

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Рис. 9

Можно показать, что все остальные магические квадраты размера  $3 \times 3$ , заполненные девятью различными ненулевыми цифрами, получаются из квадрата, изображенного на рис. 9, при помощи отражений относительно горизонтальной и/или вертикальной средней линии, а также относительно диагоналей этого квадрата. (Заметим, что суперпозиция отражения относительно какой-либо средней линии квадрата и отражения относительно диагонали квадрата представляет собой поворот на 90 градусов с центром в центре квадрата.)

А. Шень в [1] предложил следующую игру:

*На столе выложены карточки с номерами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто **первым** соберет **три** карточки с общей суммой 15.*

Как заметил А. Шень, если расположить эти карточки в виде магического квадрата (см. рис. 9), предложенная им игра сводится к обычной игре в крестики-нолики! Дело здесь в том, что существует в точности восемь различных комбинаций из трех ненулевых цифр, которые в сумме дают 15, и все эти комбинации представлены на рис. 9. (Об-

щеизвестно, что при правильной игре в крестики-нолики на квадрате  $3 \times 3$  неизбежна ничья.)

Ниже предлагается следующая 1-я модификация игры Шеня.

*На столе выложены десять карточек с написанными на них номерами: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер «три» встречается дважды). Двоих играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто **первым** сможет составить из каких-либо *трех* своих карточек набор с общей суммой 15.*

### Пример.

Таблица 3

Ходы Первого игрока	5	8	4	7	9
Ходы Второго игрока	3	2	6	3	1

Как видно из табл. 3, результат проведенной игры – ничья (ни один из игроков не может из своих пяти карточек выбрать три с общей суммой 15).

**Задача 1.** Проводится 1-я модифицированная игра Шеня. Каким будет ее итог, если оба игрока действуют оптимально?

**Решение.** Покажем, что при правильной игре Первый игрок выигрывает. Итак, первый ход Первого игрока – это карточка с числом 5. Чтобы предотвратить немедленный выигрыш Первого, Второй игрок должен взять карточку с числом 7. В противном случае своим следующим ходом эту карточку возьмет Первый игрок, а затем, как бы ни ответил ему Второй, возьмет карточку с числом 3.

После того, как Второй игрок возьмет карточку с числом 7, Первый может взять, например, карточку с числом 2. Дальнейшие ходы при оптимальной игре обоих игроков определяются однозначно (см. рис. 9 и табл. 4).

Таблица 4

Ходы Первого игрока	5	2	4	9	
Ходы Второго игрока	7	8	6		

Итак,  $2 + 4 + 9 = 15$ ; Первый игрок выиграл.

Рассмотрим теперь 2-ю модификацию игры Шеня:

*На столе выложены десять карточек с написанными на них номерами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 9 (номер «шесть» встречается дважды). Двоих играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто **первым** сможет составить из каких-либо **трех** своих карточек набор с общей суммой 15.*

**Задача 2.** Проводится 2-я модифицированная игра Шеня. Каким будет ее итог, если оба игрока действуют оптимально?

## § 7. Игра с часовыми стрелками

Вот еще одна задача, в похожей формулировке приведенная в [1].

*Задача 1. Стрелки на циферблате показывают полночь. Первый и Второй игроки по очереди переводят стрелки часов на 3 или 4 часа вперед. Выигрывает тот, кто первым*

*поставит стрелки в исходное положение. Кто выигрывает при оптимальной игре – Первый или Второй игрок?*

**Решение.** Постановка задачи, на первый взгляд, лишь несущественно отличается от постановки задачи в игре «камешки». Ниже, при поиске оптимальной стратегии, мы увидим, однако, довольно значительные отличия этих двух игр.

Как и в случае игры «камешки», будем анализировать поставленную задачу «с конца». Предположим, что стрелки удалось установить в исходное положение спустя сутки, так что часовая стрелка сделала на циферблате два полных оборота. Изобразим теперь (не на циферблате, а на числовой оси) последовательность выигрышных и проигрышных положений часовой стрелки; см. табл. 5:

*Таблица 5*

*(стрелки можно переводить на 3 или на 4 часа вперед)*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
В	?	?	П	?	?	В	В	?	?	П	?	?	В	В	?	?	П	?	?	В	В	?	?	П

Итак, анализ задачи «с конца» удалось провести и обнаружить выигрышную стратегию для Первого игрока.

Заметим, что, в отличие от анализа «с конца» в игре «камешки», относительно многих позиций мы не сумели узнать, являются ли они выигрышными или проигрышными.

Из следующей задачи будет ясно, что анализ «с конца» не является универсальным средством, позволяющим отыскать оптимальную стратегию.

**Задача 2.** Стрелки на циферблате показывают полночь. Первый и Второй игроки по очереди переводят стрелки часов на 1 или 5 часов вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелки в исходное положение. Кто выигрывает при оптимальной игре – Первый или Второй игрок?

Вот к какому результату приводит на этот раз попытка проанализировать задачу «с конца»; см. табл. 6:

Таблица 6

(стрелки можно переводить на 1 или на 5 часов вперед)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Таким образом, выяснить, как следует действовать игрокам, при помощи анализа задачи «с конца» не удается. Способ, к которому остается прибегнуть, чтобы решить задачу – построение дерева всевозможных ходов обоих игроков.

## § 8. Задача о трех кучах конфет

В этом параграфе мы рассмотрим модификацию одной превосходной игры, приведенной в книге Н.Н. Петрова; см. [2, с. 119]. (Модификация заключается в том, что у нас три кучи конфет, а не две, как в [2].) Недавно авторам стало известно, что предлагаемая задача разобрана в [7, с. 124]. Наш анализ, однако, несколько отличается от проведенного в [7].

Итак, пусть имеются три кучи конфет: в одной куче – тридцать, в другой – 25, в третьей – 17. Играют двое: Петя и Вася. Ход игрока заключается в следующем: он съедает целиком одну из куч, а любую из двух оставшихся делит на две (непустые) части произвольным образом. Тогда после очередного хода игрока снова получаются три кучи конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Очевидно, что сделать ход не удается, если во всех трех кучах осталось по одной конфете.

Кто же выиграет в этой игре – Петя (он ходит первым) или его противник Вася? Ответ на этот вопрос мы сейчас получим, рассмотрев задачу в более общем виде:

*Имеются три кучи конфет: в одной куче  $m$ , в другой  $n$ , в третьей  $k$  штук. Играют двое. Ход игрока заключается в следующем: он съедает целиком одну из куч, а любую из двух оставшихся делит на две (непустые) части произвольным образом. Тогда после очередного хода игрока снова получаются три кучи конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.*

**Случай А.** Покажем, что если одно из чисел  $m, n, k$  – четное, а два других – нечетные, то выигрывает Первый игрок. Действительно, в этом случае действия Первого игрока могут быть следующими. Он съедает одну из «нечетных» куч, а непустую «четную» кучу делит на две новые «нечетные» кучи. Таким образом, Второму игроку достаются три «нечетные» кучи. Одну из них он съедает, а одну из оставшихся (если это возможно!) делит на две части. При этом одна из двух образовавшихся новых куч обязательно будет «четной», а другая – «нечетной».

В результате Первому игроку достанется та же самая ситуация, с которой он уже имел дело: одна «четная» куча и две «нечетных». Действуя упомянутым выше способом, за конечное число ходов Первый игрок создаст ситуацию, когда во всех трех образовавшихся кучах лежит по одной конфете, и Второй не может сделать хода.

**Случай В.** Пусть теперь все три числа  $m, n, k$  – нечетные. Очевидно, что по сравнению с предыдущим случаем Первый и Второй игрок просто-напросто поменялись ролями, и выигрыш достается Второму игроку.

**Случай С.** Рассмотрим, далее, случай, когда среди чисел  $m, n, k$  два четных, а одно – нечетное. В этом случае Первый

игрок снова может обеспечить себе победу. Единственное отличие от случая А состоит в том, что на своем первом ходе Первый игрок должен съесть одну из «четных» куч.

**Случай D.** Пусть, наконец, все три числа  $m$ ,  $n$ ,  $k$  – четные. В этом случае оптимальная стратегия уже не является такой простой, как в случаях А, В и С. Понятно, что Первому игроку невыгодно разделять одну из не съеденных им «четных» куч на две «нечетные». Тем самым Первый игрок мгновенно уступил бы выигрыш Второму; см. случай А. Таким образом, Первый игрок будет стремиться разделять «четную» кучу на две «четные»; но то же самое будет ставаться делать (пока это возможно!) и Второй игрок. (Очевидно, что позиция, когда во всех трех кучах осталось по 2 конфеты, является проигрышной.)

**Пример 1.** Рассмотрим в качестве примера случай, когда в одной из куч 6 конфет, а в двух других – по 4. Порядок расположения куч, очевидно, не имеет значения. (Начальную позицию, а также каждую последующую позицию, мы будем обозначать как числовое множество, элементы которого перечислены в фигурных скобках. ) С учетом сказанного выше, партия в нашем примере может развиваться по одному из следующих сценариев:

$$\{6; 4; 4\} \rightarrow \{6; 2; 2\} \rightarrow \{4; 2; 2\} \rightarrow \{2; 2; 2\} \rightarrow \{1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 1; 1\}$$

(выигрыш Первого игрока), либо

$$\{6; 4; 4\} \rightarrow \{4; 2; 4\} \rightarrow \{2; 2; 2\} \rightarrow \{1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 1; 1\}$$

(выигрыш Второго игрока). Таким образом, в рассматриваемом примере при правильной игре Первый может обеспечить себе победу.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь важный для понимания задачи случай, когда во всех трех кучах по 4 конфеты. Тогда с учетом соображений, высказанных выше, при ра-

зумных действиях обоих игроков партия будет развиваться следующим образом:

$$\{4; 4; 4\} \rightarrow \{4; 2; 2\} \rightarrow \{2; 2; 2\} \rightarrow \{1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 1; 1\}$$

Таким образом, партия заканчивается выигрышем Второго игрока, т.е.  $\{4; 4; 4\}$  – проигрышная позиция (как и позиции  $\{2; 2; 2\}$  и  $\{1; 1; 1\}$ ).

Перейдем теперь к разбору общей ситуации в случае D. Пусть начальная позиция имеет вид  $\{2m; 2n; 2k\}$ ; для определенности будем считать, что числа  $m$  и  $n$  – нечетные, а  $k$  – четное ( $k = 2q$ ). Как мы знаем, при любой разумной стратегии игроки будут стараться разбивать «четные» кучи снова на «четные» кучи. Поэтому игра будет проходить *почти* по тому же сценарию, что и при начальной позиции  $\{m; n; k\}$ . Это означает, что при сделанных предположениях правильная игра обеспечивает Первому игроку выигрыш (см. разобранный выше случай A).

Действительно, при сделанных предположениях игра начнет протекать так:

$$\{2m; 2n; 4q\} \rightarrow \{2n; 4q - 2; 2\} \quad (\text{это был первый ход Первого игрока}).$$

Затем Второй игрок должен: либо 1) уничтожить кучу, состоящую из двух конфет; либо 2) уничтожить одну из двух других «четных» куч. В первом случае партия, очевидно, продолжится следующим образом:

$$\{2m; 2n; 4q\} \rightarrow \{2m; 4q - 2; 2\} \rightarrow \{2m_1; 2n_1; 4q_1\}$$

(где  $m_1$  и  $n_1$  – нечетные числа).

Во втором случае продолжение игры будет выглядеть так:

$$\{2m; 2n; 4q\} \rightarrow \{2n; 4q - 2; 2\} \rightarrow \{2m_2; 4n_2; 2\}$$

(где  $m_2$  нечетно).

В обоих случаях после хода Второго игрока перед Первым оказывается (как и в начале игры) куча конфет с численностью, кратной 4. Этую кучу Первый игрок всегда может разделить на две «четные» кучи, численности которых не делятся на 4. В результате в какой-то момент Второму игроку придется иметь дело с позицией {2; 2; 2}, а это, как мы знаем, – проигрышная позиция.

**Замечание.** Проведение полного анализа игры мы предоставляем читателю.

**Задача.** Имеются четыре кучи конфет, в которых содержится соответственно 25, 26, 27 и 28 конфет. Играют двое. Ход игрока (как и выше) заключается в следующем: он съедает целиком одну из куч, а любую из оставшихся делит на две (непустые) части произвольным образом. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?

## § 9. Игра с минусами

Рассмотрим еще две простые, но любопытные задачи.

**Задача 1.** Вдоль прямой через равные промежутки расположено 100 минусов. Играют двое. За один ход разрешается зачеркнуть один минус или три соседних минуса. Проигрывает тот, кто не может сделать хода (нечего зачеркивать, все минусы уже зачеркнуты). Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?

Обычно задачу про зачеркивание минусов формулируют несколько иначе – в условии говорится, что зачеркивать можно один или два рядом стоящих минуса. При такой постановке Первый игрок обеспечивает себе выигрыш, за-

черкнув единственный средний минус (если исходное число минусов нечетно) или два средних минуса (если исходное число минусов четно). Затем Первый игрок отвечает на ходы Второго симметричным образом.

В нашей постановке, однако, при правильной игре выигрывает Второй игрок. Действительно, обозначим через  $O$  середину отрезка, на котором расположены упомянутые в условии задачи сто минусов.

Тогда если Первый игрок перечеркивает минусы, лежащие по одну сторону от точки  $O$ , то Второй отвечает ему, перечеркивая минусы, расположенные симметрично относительно точки  $O$ .

Если же Первый игрок своим ходом перечеркивает три соседних минуса, лежащих по разные стороны от точки  $O$  (например, два – левее точки  $O$ , а один – правее), то Второй игрок перечеркивает один минус, соседний с перечеркнутым минусом, лежащим справа от  $O$ . В результате набор оставшихся не перечеркнутыми минусов оказывается симметричным относительно точки  $O$ . Теперь на каждый следующий ход Первого игрока Второй может ответить симметрично.

**Задача 2.** *Вдоль прямой через равные промежутки расположено 100 минусов. Играют двое. За один ход разрешается зачеркнуть один минус или пять соседних минусов. Проигрывает тот, кто не может сделать хода (нечего зачеркивать, все минусы уже зачеркнуты). Кто выигрывает при правильной игре- Первый игрок или Второй?*

Решение этой задачи мы предоставляем читателю.

## § 10. Игра «календарь»

Эта игра принадлежит математическому фольклору; ее подробный разбор содержится в [7, с. 60–61]. Наши формулировка и анализ, однако, несколько отличаются от приводимых в [7].

Итак,

**Игра «календарь».** *Играют двое, по очереди называя все более и более поздние даты текущего года. При этом соблюдаются следующие условия:*

- 1) своим начальным ходом Первый игрок называет любую дату января, за исключением 20 января;
- 2) затем каждый игрок может либо увеличивать число месяца, либо номер месяца, но дату 20 января никто из игроков называть не может;
- 3) выигрывает тот, кто сумеет назвать дату 31 декабря.

*Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?*

Заметим, прежде всего, что перечисленные условия почти совпадают с условиями следующей хорошо известной игры:

**Вспомогательная задача.** *На столе лежат две кучи камней, в которых соответственно  $M$  и  $N$  камней, причем  $M$  не равно  $N$ . Играют двое – по очереди берут произвольное количество камней из какой-то одной кучи. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.*

**Решение вспомогательной задачи.** В этой игре, как нетрудно видеть, при правильной стратегии выигрывает Первый игрок. Действительно, своим начальным ходом он должен уравнять количество камней в обеих кучах. А затем

«копировать» ходы противника, используя симметричную стратегию (и тем самым каждый раз уравнивая количество камней в кучах).

Вернемся теперь к рассматриваемой игре «календарь».

В этой игре “камни из кучи № 1” – это натуральные числа 1, 2, 3, … , 31, а “камни из кучи № 2” – месяцы года: январь, февраль, ..., декабрь.

Как мы знаем из решения вспомогательной задачи, своим начальным ходом Первый игрок должен уравнять количество “камней” в обеих кучах. По условию игры, Первый игрок своим начальным ходом должен назвать какую-то январскую дату и тем самым забрать один месяц (январь) из кучи, содержащей 12 месяцев. В результате численность кучи № 2 становится равной 11.

Теперь, чтобы уравнять численности обеих куч, Первый игрок должен назвать число 20. Действительно, тогда в куче № 1 останутся только натуральные числа 21, 22, 23, … 31 (всего 11 штук).

Но дату 20 января называть запрещено! Поэтому в решение вспомогательной задачи необходимо внести корректировки. А именно, своим начальным ходом Первый игрок должен назвать дату 19 января. Так как запрет называть дату 20 января относится к обоим игрокам, то Второй будет вынужден увеличить либо число месяца (января), либо назвать один из следующих месяцев, сохранив число 19. В обоих случаях Первый игрок сможет применять симметричную стратегию, уравнивая численность обеих куч, что и обеспечивает ему победу в игре.

### **Замечание 1.**

После начального хода “19 января”, Первый игрок может легко (не составляя таблицы выигрышных и проиг-

рышных позиций) определять, каким должен быть его следующий ход. Действительно, равночисленность куч означает выполнение равенства:

$$31 - \text{“число”} = 12 - \text{“номер месяца”},$$

т.е.

$$\text{“число”} = 19 + \text{“номер месяца”}. \quad (10.1)$$

Это равенство может использоваться Первым игроком в двух различных (и, в некотором смысле, противоположных) ситуациях.

А) В случае, если “номер месяца” сохраняется, Первый игрок называет определяемое из равенства (10.1) новое “число”.

В) В случае, если сохраняется “число”, (10.1) позволяет вычислить новый “номер месяца”:

$$\text{“номер месяца”} = \text{“число”} - 19. \quad (10.2)$$

Например, если Второй игрок назвал дату “25 февраля”, то использовать (10.1) для определения нового “числа” невозможно, т.к. получим, что новое “число” должно быть равно  $19 + 2 = 21$ . Однако двигаться по времени в обратную сторону запрещено условиями игры. Поэтому пользуемся (10.2) и получаем новый “номер месяца”:  $25 - 19 = 6$ . Таким образом, в ответ на “25 февраля” Первый игрок должен назвать “25 июня”.

### **Замечание 2.**

Заметим следующее любопытное обстоятельство, маскирующее симметрию игры «календарь». А именно, то, что в разных месяцах – разное количество дней, причем в феврале может быть либо 28 дней, либо 29. На первый взгляд кажется, что эти детали приведут к весьма сложной оптимальной стратегии, однако они, как нетрудно убедиться, на нее вовсе не влияют. Дело в том, что для осуществ-

ления выигрышной стратегии Первому игроку необходимо и достаточно сделать несколько ходов, выбрав их из следующего множества:

{“19 января”, “21 февраля”, “22 марта”, “23 апреля”, “24 мая”, “25 июня”, “26 июля”, “27 августа”, “28 сентября”, “29 октября”, “30 ноября”, “31 декабря”}.

Все эти ходы, очевидно, возможны, и различное количество дней в месяцах не накладывает на их осуществимость никаких ограничений.

Что касается возможностей для ходов Второго игрока, то их, действительно, становится меньше, но это никак не влияет на выигрышную стратегию Первого.

**Задача.** Заменим в игре «календарь» запрещенную дату “20 января” на “21 февраля”, а остальные условия оставим в силе. Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?

## § 11. Доказательство мультипликативности периода в игре «камешки»

Здесь мы приведем краткое доказательство гипотезы, сформулированной в §2.

**Теорема 3.** Рассматривается  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ -игра «камешки». Период последовательности проигрышер и выигрышер ( $\Pi, V$ -последовательности) в этой игре обозначим через  $T_1$ .

Одновременно с этой игрой рассматривается  $(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$ -игра «камешки», где  $k$  – произвольное натуральное число, большее единицы; период соответствующей  $\Pi, V$ -последовательности обозначим через  $T_k$ . Тогда

1) длина периода  $T_k$  будет в  $k$  раз больше длины периода  $T_1$ ;

2) “внутренние пропорции” периода  $T_k$  будут такими же, как и у периода  $T_1$ .

**Замечание.** Поясним, что мы понимаем под “внутренними пропорциями” любой конечной последовательности букв П и В.

Рассмотрим, например, следующую последовательность длины 7:

ППВВВПВ; ее “внутренние пропорции” – это серия отношений длин ее последовательных частей, состоящих из букв одного типа. А именно,  $2 : 3 : 1 : 1$ .

Рассмотрим теперь последовательность длины 14:

ППППВВВВВВППВВ; ее внутренние пропорции – это серия отношений  $4 : 6 : 2 : 2$ .

Сокращая на общий множитель 2, получаем:

$$4 : 6 : 2 : 2 = 2 : 3 : 1 : 1.$$

**Доказательство теоремы.** Мы ограничимся тем, что разберем один простой пример, из которого будет ясна идея доказательства в общем случае.

Итак, рассмотрим игру «камешки», в которой из кучи камней разрешается брать 2 или 3 камня, т.е.

(2; 3)-игру. Период последовательности проигрышер и выигрышер в этой игре, как нетрудно проверить, имеет вид: ППВВВ. Удвоим длину этой последовательности букв, сохранив ее “внутренние пропорции”: ППППВВВВВВ. Из диаграмм, представленных на рис. 10 и 11, ясно, почему новая построенная последовательность неизбежно окажется периодом (4; 6)-игры «камешки». Все дело в том, что длины возможных ходов возросли во столько же раз, во

сколько увеличились расстояния между соответствующими буквами. Общий случай рассматривается аналогично.

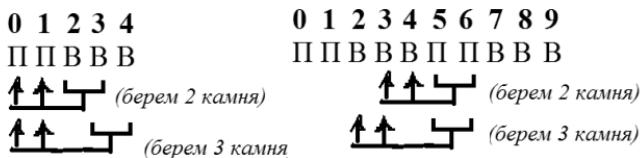


Рис. 10. (2; 3)-игра

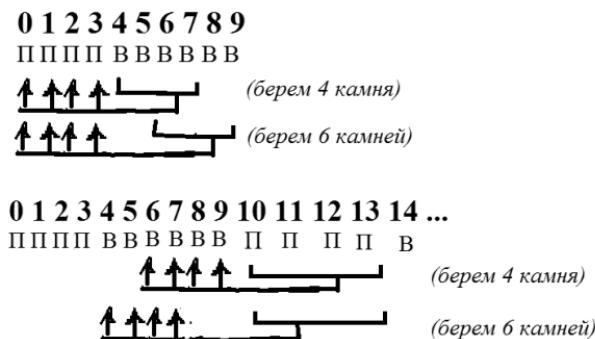


Рис. 11. (4; 6)-игра

В заключение приведем пример игры «камешки», в которой у П, В-последовательности имеется предпериодическая часть (пример взят из курса А.Л. Семенова, читавшегося в МПГУ).

А именно, речь идет о (3; 7; 8)-игре. Для нее П, В-последовательность, как нетрудно проверить, имеет вид (начало последовательности соответствует нулевой позиции, когда в куче не осталось камней):

$$\text{ППП ВВВ П ВВВВ ПП ВВВ ПП ВВВ ПП ВВВ ПП...} \quad (11.1)$$

А вот как выглядит начало П,В-последовательности для (6; 14; 16)-игры:

**ПППППП ВВВВВВ ПП ВВВВВВВВ ПППП ВВВВВВ ПППП...** (11.2)

Как и следовало ожидать, внутренние пропорции предпериодических частей у последовательностей (11.1) и (11.2) (как и внутренние пропорции периодов) одинаковы.

## §12. Игра «камешки» в случае трех вариантов хода. Опровергнутая гипотеза

Вывод единой формулы для длины периода последовательности проигрышер и выигрышер в ( $a, b, c$ )-игре «камешки» кажется довольно безнадежным делом. Каждая пара чисел из набора  $\{(a,b), (a,c), (b,c)\}$  порождает свой период, отвечающий игре камешки с двумя вариантами хода. Длины этих периодов, соответственно, таковы:

$$a + b, a + c, b + c \text{ (см. основную теорему 2 из §1).}$$

Кроме того, каждое отдельно взятое число из набора  $\{a, b, c\}$  порождает свой период, отвечающий игре «камешки» с одним вариантом хода; длины этих периодов (как несложно проверить) соответственно равны  $2a, 2b, 2c$ . Таким образом, мы можем ожидать, что период ( $a, b, c$ )-игры будет представлять собой результат взаимодействия периодов с длинами

$$a + b, a + c, b + c, 2a, 2b, 2c. \quad (12.1)$$

Взаимодействие этих многочисленных «не осуществившихся» периодов, казалось бы, должно было приводить к полиномиальной зависимости длины П,В-периода в ( $a, b, c$ )-игре.

Однако из результатов предыдущего параграфа следует, что если бы подобная универсальная полиномиальная формула существовала, то она должна была бы представлять собой полином первой степени. Как будет видно из приводимых ниже примеров, ситуация с длиной периода оказывается более сложной.

**Пример 1.** Рассмотрим  $(2, 3, 6)$ -игру «камешки»; длину периода соответствующей  $\Pi, \text{B}$ -последовательности будем обозначать через  $|T|$ .

Приведем  $\Pi, \text{B}$ -последовательность для этой игры (*здесь и в дальнейших примерах начало последовательности соответствует нулевой позиции, когда в куче не осталось камней*):

$$\text{ППВВВПВВВ ППВВВПВВВ ППВВВПВВВ...} \quad (12.2)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.2), очевидно, равна

$$|T| = 9 = 3 + 6$$

(и тем самым совпала с длиной периода для  $(3, 6)$ -игры; см. теорему 2 из §1).

**Пример 2.** Рассмотрим  $(2, 5, 6)$ -игру «камешки»; длину периода соответствующей  $\Pi, \text{B}$ -последовательности, как и выше, обозначаем через  $|T|$ .

Нетрудно проверить, что  $\Pi, \text{B}$ -последовательность для этой игры имеет вид

$$\text{ППВВПВВВПВВ ППВВПВВВПВВ ППВВПВВВПВВ...} \quad (12.3)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.3), очевидно, равна

$$|T| = 11 = 5 + 6$$

(и тем самым совпала с длиной периода для  $(5, 6)$ -игры).

**Пример 3.** Рассмотрим  $(3, 6, 7)$ -игру «камешки».

Нетрудно проверить, что П,В-последовательность для этой игры имеет вид

$$\text{ПППВВВВВВВ ВПППВВВВВВВ ВПППВВВВВВВ...} \quad (12.4)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.4), очевидно, равна

$$|T| = 10 = 3 + 7$$

(и тем самым совпала с длиной периода для  $(3, 7)$ -игры).

**Пример 4.** Рассмотрим  $(3, 6, 10)$ -игру «камешки».

Нетрудно проверить, что П,В-последовательность для этой игры имеет вид

$$\text{ПППВВВВВВВПВВВ ВПППВВВВВВВПВВВ ВПППВВВВВВВПВВВ...} \quad (12.5)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.5), очевидно, равна

$$|T| = 13 = 3 + 10$$

(и тем самым совпала с длиной периода для  $(3, 10)$ -игры).

**Пример 5.** Рассмотрим  $(2, 7, 10)$ -игру «камешки».

Нетрудно проверить, что П,В-последовательность для этой игры имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{ППВВППВВВПВВВПВВВ ВППВВППВВВПВВВПВВВ} \\ &\text{ППВВППВВВПВВВПВВВ...} \end{aligned} \quad (12.6)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.6), очевидно, равна

$$|T| = 17 = 7 + 10$$

(и тем самым совпала с длиной периода для  $(7, 10)$ -игры).

**Пример 6.** Рассмотрим  $(1,8,9)$ -игру «камешки». Нетрудно проверить, что П,В-последовательность этой игры имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{ПВПВПВПВВВВВВВВ} \quad \text{ПВПВПВВВВВВВВ} \\ & \text{ПВПВПВПВВВВВВВ...} \end{aligned} \tag{12.7}$$

Итак, длина периода для последовательности (12.7), очевидно, равна 16 и тем самым совпадает с длиной периода для 8-игры «камешки» (игры с одним вариантом хода).

Предыдущие шесть примеров похожи друг на друга в том смысле, что в них у П,В-последовательности отсутствует предпериодическая часть. На наш взгляд, еще более впечатляющими являются примеры с предпериодической частью, которая иногда оказывается намного более длинной, чем собственно период. Три таких примера мы здесь приведем.

**Пример 7.** Рассмотрим  $(1, 8, 11)$ -игру «камешки».

Нетрудно проверить, что П,В-последовательность для этой игры имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{ПВПВПВПВВВВВВ} \quad \text{ПВПВВПВПВВПВВВ} \\ & \text{ПВПВВПВПВВПВВВ...} \end{aligned} \tag{12.8}$$

Итак, длина периода для последовательности (12.8), очевидно, равна

$$|T| = 19 = 8 + 11$$

(и тем самым совпала с длиной периода для  $(8,11)$ -игры). Жирным шрифтом выделен предпериод последовательности (12.8); его длина равна 16.

**Пример 8.** Рассмотрим  $(5,7,13)$ -игру «камешки».

Нетрудно проверить, что П,В-последовательность для этой игры имеет вид

$$\text{ПППППВВВВВВВВПВВВВВПППВПВВВВВПВВ ВП ВП}\\ \text{ВП ВП ВП ВП ВП ВП ...} \quad (12.9)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.9), очевидно, равна

$$|T| = 2 = (5 + 13)/9 = (5 + 7)/6 = (7 + 13)/10.$$

Тем самым последовательность (12.9), очевидно, обладает периодами длины  $5 + 13$ ,  $5 + 7$  и  $7 + 13$ , кратными наименьшему периоду длины 2. Что касается предпериодической части последовательности (12.9), то ее длина равна 35.

**Пример 9.** Рассмотрим  $(6,8,15)$ -игру «камешки».

Нетрудно проверить, что П,В-последовательность для этой игры имеет вид

$$\text{ПППППВВВВВВВВПВВВВВППППВПВВВВВПВВ}\\ \text{ВВПВПВПВПВПВВВ ПВПВПВ ВПВПГВ ВППВПВ}\\ \text{ПВПВПВВ ...} \quad (12.10)$$

Итак, длина периода для последовательности (12.10), очевидно, равна

$$|T| = 7 = (6 + 8)/2 = (6 + 15)/3.$$

Тем самым последовательность (12.10) обладает периодами длины  $6 + 8$  и  $6 + 15$ , кратными наименьшему периоду длины 7. Что касается предпериодической части последовательности (12.10), то ее длина равна 56.

**Замечание.** Механизм взаимодействия “несостоявшихся периодов” в игре «камешки» должен, судя по результатам примеров 8 и 9, быть далеко не простым. При этом не менее интересен также механизм формирования предпериодической части П,В-последовательности. К сожалению, авторам не удалось обнаружить никаких публикаций на эту тему.

В предыдущем издании была выдвинута

**Гипотеза.** а) Длина наименьшего периода в  $(a, b, c)$ -игре «камешки» всегда является делителем произведения чисел (12.1);

б) если у  $\Pi, B$ -последовательности  $(a, b, c)$ -игры «камешки» имеется ненулевой предпериод, то его длина является делителем произведения чисел (12.1).

Как удалось выяснить авторам, эта гипотеза неверна. В частности, в  $(2, 5, 7)$ -игре длина периода равна 22, а сам период имеет вид

ППВВПВВВВПВВПВВВВВВ.

### §13. Игра «камешки» в случае трех вариантов хода. Резонанс периодов

**Теорема 3.** Пусть  $a, b, c$  – различные натуральные числа, расположенные в порядке возрастания. Тогда:

А) если  $a + b$  является делителем  $b + c$ , то длина наименьшего периода  $\Pi, B$ -последовательности в  $(a, b, c)$ -игре либо равна  $a + b$ , либо является делителем этого числа;

Б) если  $a + b$  является делителем  $a + c$ , то длина наименьшего периода  $\Pi, B$ -последовательности в  $(a, b, c)$ -игре либо равна  $a + b$ , либо является делителем этого числа.

**Доказательство.** Мы ограничимся доказательством утверждения А) теоремы; утверждение Б) доказывается аналогично.

Итак, пусть

$$b + c = k(a + b),$$

где  $k$  – произвольное натуральное число;  $k > 1$ . Очевидно, это равенство равносильно тому, что

$$c = k(a + b) - b. \quad (13.1)$$

Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что П,В-последовательности для  $(a, b, c)$ -игры в точности совпадает с П,В-последовательностью для  $(a, b)$ -игры. Заметим, прежде всего, что П,В-последовательность для  $(a, b)$ -игры имеет вид

$$\begin{array}{c} \overline{\text{ПППППП...ПХХХХХХХХ...Х}} \\ (\text{а символов})(\text{b символов}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \overline{\text{ПППППП...ПХХХХХХХХ...Х}} \\ (\text{а символов})(\text{b символов}) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overline{\text{ПППППП...ПХХХХХХХХ...Х}} \\ (\text{а символов})(\text{b символов}) \end{array} \dots \quad (13.2)$$

Здесь символ Х может принимать как значение П, так и значение В – это зависит от соотношения между числами  $a$  и  $b$ . Заметим теперь, что если от номера  $N$  любой П-позиции в последовательности (13.2) (в том числе – от номера П-позиции, скрывающейся под символом X) отнять число  $c$ , то мы обязательно получим номер некоторой В-позиции. (Мы предполагаем, что  $N \geq c$ .)

Действительно,

$$N - c \equiv N - k(a + b) + b \quad (13.3)$$

очевидно, снова является номером П-позиции в одном из предыдущих периодов последовательности (13.2). Следовательно,

$$N - c \equiv N - k(a + b) + b \quad (13.4)$$

является номером В-позиции, поскольку из позиции с номером (13.4) есть ход в проигрышную позицию с номером (13.3) – нужно взять  $b$  камней из кучи.

Отсюда сразу следует, что, добавляя в  $(a, b)$ -игру возможность взять  $c$  камней из кучи, т.е. превращая ее в  $(a, b, c)$ -игру, мы исключаем возможность превращения проигрышных позиций в выигрышные. Тот факт, что для выигрышных позиций из последовательности (13.2) образуются новые возможные ходы, очевидно, не может превратить их в проигрышные. Итак, мы показали, что (13.2) является одновременно П,В-последовательностью для  $(a, b)$ -игры и для  $(a, b, c)$ -игры. Отсюда в силу результатов §1 и следует утверждение теоремы.

**Пример 1.** Рассмотрим  $(1, 2, 7)$ -игру «камешки»; длину периода соответствующей П,В-последовательности, как и выше, обозначаем через  $|T|$ .

Приведем П,В-последовательность для этой игры (*как всегда, начало последовательности соответствует нулевой позиции, когда в куче не осталось камней*):

$$\text{ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ...} \quad (13.5)$$

Итак, длина периода для последовательности (13.5), очевидно, равна

$$|T| = 3 = \text{НОД}(1 + 2; 2 + 7).$$

**Пример 2.** Рассмотрим  $(2, 3, 7)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

$$\text{ППВВВ ППВВВ ППВВВ ППВВВ ППВВВ...} \quad (13.6)$$

Итак, длина периода для последовательности (13.6), очевидно, равна

$$|T| = 5 = \text{НОД}(2 + 3; 3 + 7).$$

**Пример 3.** Рассмотрим  $(1, 6, 8)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

$$\text{ПВПВПВВ ПВПВПВВ ПВПВПВВ ПВПВПВВ...} \quad (13.7)$$

Итак, длина периода для последовательности (13.7), очевидно, равна

$$|T| = 7 = \text{НОД}(1 + 6; 6 + 8).$$

**Пример 4.** Рассмотрим  $(2, 7, 11)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

ППВВППВВВ ППВВППВВВ ППВВППВВВ ППВВППВВВ...  
(13.8)

Итак, длина периода для последовательности (13.8), очевидно, равна

$$|T| = 9 = \text{НОД}(2 + 7; 7 + 11).$$

**Пример 5.** Рассмотрим  $(1, 4, 6)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

ПВПВВ ПВПВВ ПВПВВ ПВПВВ ПВПВВ ПВПВВ... (13.9)

Итак, длина периода для последовательности (13.9), очевидно, равна

$$|T| = 5 = \text{НОД}(1 + 4; 4 + 6).$$

**Пример 6.** Рассмотрим  $(2, 5, 9)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

ППВВПВВ ППВВПВВ ППВВПВВ ППВВПВВ ППВВПВВ...  
(13.10)

Итак, длина периода для последовательности (13.10), очевидно, равна

$$|T| = 7 = \text{НОД}(2 + 5; 5 + 9).$$

**Пример 7.** Рассмотрим  $(3, 4, 10)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

ПППВВВВ ПППВВВВ ПППВВВВ ПППВВВВ ПППВВВВ...  
(13.11)

Итак, длина периода для последовательности (13.11), очевидно, равна

$$|T| = 7 = \text{НОД} (3 + 4; 4 + 10).$$

**Пример 8.** Рассмотрим  $(3, 5, 11)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

$$\begin{array}{cccccc} \text{ПППВВВВВ} & \text{ПППВВВВВ} & \text{ПППВВВВВ} & \text{ПППВВВВВ} \\ \text{ПППВВВВ...} & & & & & (13.12) \end{array}$$

Итак, длина периода для последовательности (13.12), очевидно, равна

$$|T| = 8 = \text{НОД} (3 + 5; 5 + 11).$$

**Пример 9.** Рассмотрим  $(2, 9, 13)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

$$\begin{array}{cccccc} \text{ППВВППВВПВВ} & \text{ППВВППВВПВВ} & \text{ППВВППВВПВВ} \\ \text{ППВВППВВПВВ...} & & & & & (13.13) \end{array}$$

Итак, длина периода для последовательности (13.13), очевидно, равна

$$|T| = 11 = \text{НОД} (2 + 9; 9 + 13).$$

**Пример 10.** Рассмотрим  $(1, 2, 8)$ -игру «камешки». Приведем П,В-последовательность для этой игры:

$$\text{ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ ПВВ...} \quad (13.14)$$

Итак, длина периода для последовательности (13.14), очевидно, равна

$$|T| = 3 = \text{НОД} (1 + 2; 1 + 8).$$

**Замечание.** Теорема 3 позволяет составлять задачи типа «Придумать  $(a,b,c)$ -игру “камешки” с периодом заданной длины  $|T|$ ».

В силу результатов из §1, такого рода задачи неинтересны для игры с двумя вариантами хода, но для игры с тремя вариантами хода эти задачи требуют некоторых размышлений в случае нечетного  $|T|$ .

**Замечание.** Теорема 3 легко обобщается на случай игры «камешки» с четырьмя и большим количеством вариантов хода.

Чтобы избежать громоздких обозначений, мы ограничимся здесь формулировкой в случае четырех вариантов хода.

Итак, справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $a, b, c, d$  – различные натуральные числа, расположенные в порядке возрастания. Тогда если выполнены условия:

А)  $a + b$  является делителем  $a + c$  или  $b + c$ ;

Б)  $a + b$  является делителем  $a + d$  или  $b + d$ ,

то П,В-последовательность в  $(a, b, c, d)$ -игре совпадает с П,В-последовательностью в  $(a, b)$ -игре, а длина наименьшего периода П,В-последовательности в  $(a, b, c, d)$ -игре либо равна  $a + b$ , либо является делителем этого числа.

Любопытно, что с помощью такого обобщения теоремы 3 мы можем сразу заключить, что у  $(1, 2, 7, 8)$ -игры длина периода равна 3. Действительно, достаточно заметить, что  $1 + 2$  является делителем обеих сумм  $2 + 7$  и  $1 + 9$ . (В то же время с помощью теоремы 2 из §1 удается установить лишь более слабый результат, а именно, что у  $(1, 2, 7, 8)$ -игры имеется период длины 9.)

Далее, объединяя результат теоремы 2 из §1 с приемом, использованным при доказательстве теоремы 3, без труда заключаем, что справедлива следующая

**Теорема 5.** Пусть  $a, b, c, d$  – различные натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, причем числа  $a$  и  $c$  имеют одну и ту же четность. Тогда если выполнены условия:

*A)  $b = (a + c)/2$ ;*

*Б)  $a + c$  является делителем  $a + d$  или  $b + d$  или  $c + d$ , то П,В-последовательность в  $(a, b, c, d)$ -игре совпадает с П,В-последовательностью в  $(a, b, c)$ -игре, а длина наименьшего периода П,В-последовательности в  $(a, b, c, d)$ -игре либо равна  $a + c$ , либо является делителем этого числа.*

**Задача.** Попробуйте, не выписывая П,В-последовательности, установить длину ее периода в  $(1, 4, 9, 11)$ -игре «камешки».

*Указание.  $9 + 1$  и  $11 + 4$  делятся нацело на  $1 + 4$ .*

**Задача.** Попробуйте, не выписывая П,В-последовательности, установить длину ее периода в  $(2, 4, 6, 14)$ -игре «камешки».

*Указание. Сумма  $14 + 2$  делится нацело на  $2 + 6$ .*

**Задача.** Попробуйте, не выписывая П,В-последовательности, установить длину ее периода в  $(1, 3, 5, 1001, 3001, 3027)$ -игре «камешки».

*Указание. Суммы  $1001 + 1$ ,  $3001 + 5$  и  $3027 + 3$  делятся нацело на  $1 + 5$ .*

## §14. Игра «полоска».

### Скрытая стратегия

Хорошо известна следующая версия игры «камешки», в которой выигрышная стратегия видна «невооруженным глазом» и не требует громоздких предварительных вычислений.

Речь идет о  $(1, 2, 4)$ -игре. Пусть, например, число М камней в куче равно 61. Тогда при правильной игре выигрывает Первый игрок. Своим первым ходом он обязательно

должен взять один камень. Тогда в куче останется 60 камней – число, делящееся на 3. Затем на каждый ход Второго игрока Первый отвечает таким образом, чтобы число камней, остающихся в куче, делилось на 3. Очевидно, что при такой стратегии Первого его партнер выиграть (взять последний камень) не может.

Приведем для большей наглядности ответы Первого на ходы Второго:

Ход Второго: «1» – Ответ Первого: «2»

Ход Второго: «2» – Ответ Первого: «1»

Ход Второго: «4» – Ответ Первого: «2»

**Замечание.** В общем случае нетрудно понять, что если число  $M$  камней в куче не делится на 3, то выигрышная стратегия есть у Первого игрока, в противном случае – выигрышная стратегия имеется у Второго.

Переформулируем теперь нашу  $(1, 2, 4)$ -игру следующим образом (см. в этой связи также [7]).

**Игра «полоска» № 1.** Предположим, что имеется бумагная полоска размером  $1 \times M$ , а у каждого из игроков есть неограниченное количество единичных квадратов, доминошек размером  $1 \times 2$  и тетраминошек размером  $1 \times 4$ . Первый игрок за один ход выкладывает на полоску с ее левого конца какую-либо из своих фигурок; Второй игрок действует аналогичным образом с правого конца полоски.

Выигрывает тот, чья фигурка впервые завершит замощение полоски.

Никакой разницы между двумя постановками задачи вроде бы не наблюдается, и выигрышная стратегия в игре «полоска» № 1 в общем случае такова:

Восстановление делимости на 3 числа незамощенных клеток полоски. (14.1)

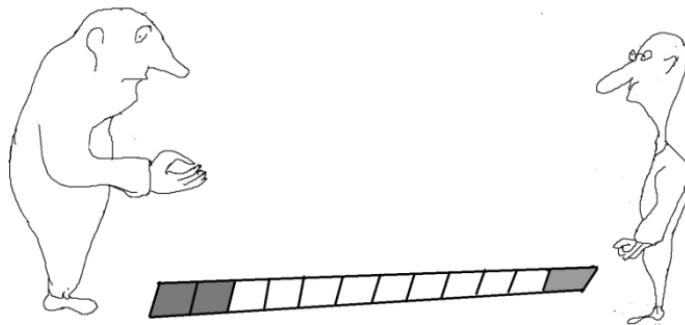


Рис. 12

Тем не менее, некоторая разница в обеих постановках есть. В новой постановке каждый из игроков выкладывает на полоску свои фигурки, которые не смешиваются с фигурками другого игрока. Это геометрическое обстоятельство (см. рис.12) наводит на мысль о том, чтобы видоизменить игру, расширив возможности игроков.

А именно:

**Игра «полоска» № 2.** Дополнительно разрешим Второму игроку в качестве очередного хода забирать обратно последнюю фигуруку, выложенную им самим во время предыдущего хода.

Любопытно, что при  $M$ , не делящемся на 3, у Первого игрока по-прежнему остается выигрышная стратегия (14.1). Если Второй забирает с полоски некоторую фигуруку (например, доминошку), то Первый, отвечая на этот ход, должен аналогичную фигуруку выкладывать.

**Замечание.** Можно было бы в игре «полоска» № 2 предоставить Первому игроку такую же дополнительную возможность, что и Второму. Тогда правила игры снова стали бы «равноправными», но выигрышная стратегия при этом не изменилась бы.

Однако существует способ так расширить свободу действий Второго игрока, что у него появится универсальная выигрышная стратегия в видоизмененной (1, 2, 4)-игре, независимо от того, делится  $M$  на 3 или нет. (Впрочем, для реализации этой универсальной стратегии нужно, чтобы  $M$  было достаточно велико.)

**Игра «полоска» № 3.** *Вместо того, чтобы разрешать Второму игроку забирать обратно одну свою последнюю выложенную им фигурку, разрешим Второму в качестве очередного хода одновременно забирать обратно две последние фигурки, выложенные им самим во время двух предыдущих ходов.*

Теперь, если  $M$  достаточно велико, при правильной игре Второго у Первого игрока нет шансов на выигрыш. Действительно, будем для определенности по-прежнему считать, что длина полоски равна 61. Первый игрок с необходимостью должен своим первым ходом выложить на полоску единичный квадрат. (В противном случае Второй игрок перехватит инициативу и воспользуется выигрышной стратегией (14.1), поменявшись ролями с Первым.) Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что Первый игрок вначале выкладывает единичный квадрат, а затем, в ответ на действия Второго, придерживается стратегии (14.1). Что касается Второго игрока, то ему достаточно выкладывать на полоску поочередно квадраты и доминошки, а затем, в ответ на очередной ход Первого, снять с полоски один квадрат и одну доминошку. В результате именно Первому игроку придется нарушить своим следующим ходом делимость на 3 количества остающихся не заполненными клеток полоски. После чего Второй игрок, меняясь ролями с Первым, применяет выигрышную стратегию (14.1).

**Замечание.** Пусть длина полоски достаточно велика. Нетрудно видеть, что если в версии № 3 игры «полоска» дополнительno разрешить Первому игроку в качестве очередного хода забирать обратно выложенную им самим последнюю фигурку, то у Второго по-прежнему останется выигрышная стратегия. (См. выше пояснение к «полоске» № 2.)

Сформулируем соответствующие правила игры более аккуратно.

**Игра «полоска» № 4.** Предположим, что имеется бумагная полоска размером  $1 \times M$  (где  $M$  достаточно велико), а у каждого из игроков есть неограниченное количество единичных квадратов, доминошек размером  $1 \times 2$  и тетраминошек размером  $1 \times 4$ . Первый игрок за один ход выкладывает на полоску с ее левого конца какую-либо из своих фигурок; Второй действует аналогичным образом с правого конца полоски.

При этом Первому игроку разрешается вместо очередного хода забирать с полоски (одну) последнюю выложенную им самим фигурку, а Второму вместо очередного хода разрешается забирать две последние выложенные им самим фигурки.

Выигрывает тот, чья фигурка впервые завершит замощение полоски.

В силу сказанного выше, справедлива следующая

**Теорема 6.** В игре «полоска» № 4 у Второго игрока при каждом достаточно большом  $M$  существует выигрышная стратегия.

**Замечание.** Покажем, что при малых  $M$  теорема 6, вообще говоря, неверна. Пусть, например,  $M = 13$ . Рассмотрим соответствующую игру, представив ее в виде таблицы.

Таблица 14.1

M = 13 (игра «полоска» № 4)

№ хода	Ход Первого игрока (длина выложенного прямоугольника)	Ход Второго игрока (длина выложенного прямоугольника)	Длина незамощенной части полоски
1	4 [13 – 4 = 9]	1	9 – 1 = 8
2	2 [8 – 2 = 6]	2	6 – 2 = 4
3	4 полоска замощена; Первый выиграл		4 – 4 = 0

При M = 14 Второму уже удается реализовать свою выигрышную стратегию.

Приведем фрагмент соответствующей игры в виде таблицы.

Таблица 14.2

M = 14 (игра «полоска» № 4)

№ хода	Ход Первого игрока (длина выложенного прямоугольника)	Ход Второго игрока (длина выложенного прямоугольника)	Длина незамощенной части полоски
1	2 [14 – 2 = 12]	1	12 – 1 = 11
2	2 [11 – 2 = 9]	2	9 – 2 = 7
3	4 [7 – 4 = 3]	- (1 + 2)	3 + (1 + 2) = 6

Итак, мы видим, что после третьей пары ходов длина незамощенной части полоски оказалась кратной трем и Второй игрок может начать пользоваться стратегией (14.1), поменяввшись ролями с Первым игроком.

**Замечание.** По сравнению с классической (1, 2, 4)-игрой, «полоска» № 4 обладает при достаточно большом  $M$  следующей особенностью. Второй игрок может долго делать произвольные ходы, скрывая тем самым от противника и зрителей свою выигрышную стратегию. Кроме того, Второй игрок может, ничем не рискуя, предложить Первому самому выбрать любое (достаточно большое) значение  $M$  в предстоящей игре.

**Замечание.** Вместо (1, 2, 4)-игры в основу «полоски» можно было бы с тем же успехом положить (1, 2, 5)-игру или любую (1, 2,  $N$ )-игру, где  $N > 3$  и не кратно трем (если строить стратегию на основе делимости на 3). Похожим образом можно было бы обобщить (1, 2, 3, 4,  $Z$ )-игру, где  $Z > 5$  и не кратно пяти, опираясь на делимость на 5.

\* \* \*

**Замечание.** Предложенную выше версию № 4 игры «полоска» можно видоизменить следующим образом, формально поставив при этом Второго игрока в более трудные условия.

**Игра «полоска» № 5.** Предположим, что имеется бумагная полоска размером  $1 \times M$  (где  $M$  достаточно велико), а у каждого из игроков есть неограниченное количество единичных квадратов, доминошек размером  $1 \times 2$  и тетраминошек размером  $1 \times 4$ . Первый игрок за один ход выкладывает на полоску с ее левого конца какую-либо из своих фигурок; Второй действует аналогичным образом с правого конца полоски.

*При этом:*

*A) Первому игроку разрешается вместо очередного хода забирать с полоски (одну) последнюю выложенную им самим фигурку;*

*Б) Второму игроку запрещается повторять предшествующий ход Первого игрока;*

*В) Второму игроку вместо очередного хода разрешается забирать три последние выложенные им самим фигуруки.*

*Выигрывает тот, чья фигурка впервые завершит замощение полоски.*

**Теорема 7.** *В игре «полоска» № 5 у Второго игрока при каждом достаточно большом  $M$  существует выигрышная стратегия.*

**Доказательство.** Будем для определенности считать, что  $M = 65$ . Тогда первым ходом Первого игрока должно быть выкладывание на полоску доминошки; в противном случае Второй воспользуется выигрышной стратегией (14.1), поменявшиесь ролями с Первым. Таким образом, мы видим, что Первый игрок, как и в игре «полоска» № 4, вынужден следовать стратегии (14.1), иначе выигрышной стратегией воспользуется Второй.

Что касается Второго игрока, то он может с самого начала выкладывать на полоску единичные квадраты, и Первый, очевидно, не сможет ему помешать, воспользовавшись условием Б) игры. Действительно, единственный способ для Первого не выбиться из стратегии (14.1) – это отвечать на выложенные единичные квадраты выкладыванием своих доминошек.

В результате, выложив подряд три единичных квадрата, Второй игрок может в качестве своего следующего хода забрать эти три квадрата и поставить тем самым Первого игрока в проигрышную позицию (см. стратегию (14.1)).

При этом условие Б) игры не может помешать Второму начать использовать выигрышную стратегию (14.1) (где он меняется ролями с Первым). Действительно, каждый ход Первого игрока будет нарушать делимость на 3 числа независимо от того, сколько единичных квадратов было выложено на полоску.

мощенных клеток полоски, а ход Второго, восстанавливающий эту делимость, очевидно, не будет повторять предшествующий ход Первого. Теорема доказана.

**Замечание.** Дальнейшие сведения о замощении полосок можно узнать в [7, 8, 9].

**Задача.** Рассматривается  $(2, 4, 32)$ -игра «камешки»; первоначальное число  $M$  камней в куче равно 3002. Опишите выигрышную стратегию Первого игрока, не прибегая к вычислению периода  $\Pi_{\text{B}}$ -последовательности.

*Указание. Выигрышная стратегия Первого игрока в этой игре аналогична выигрышной стратегии Первого в  $(1, 2, 16)$ -игре при  $M = 1501$ .*

## Литература

1. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: Издательство МЦНМО, 2008.
2. Петров Н.Н. Математические игры. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
3. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. – М.: МАКС Пресс, 2016.
4. Потопахин В. Видеоурок 71 (по теме «ползунок»)  
<https://www.youtube.com/watch?v=Bz7Ynl8FvbY>
5. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Информатика 4 класс. Часть 3. – М.: Просвещение, 2013.
6. Фролов И. Введение в теорию комбинаторных игр  
[http://xity.narod.ru/comb/Frolov\\_Combinatoric\\_Games.pdf](http://xity.narod.ru/comb/Frolov_Combinatoric_Games.pdf)
7. Копылов И.А. Логические игры. – М.: URSS, 2019.
8. Ландо С.К. Введение в дискретную математику. – М.: МЦНМО, 2019.
9. Локшин А.А., Иванова Е.А. «Камешки» и другие математические игры. Изд. 2 – М: МАКС Пресс, 2021.